

INTÉGRALES DE COURBURE SUR DES VARIÉTÉS FEUILLETÉES

FABIANO BRITO, RÉMI LANGEVIN
& HAROLD ROSENBERG

Introduction

Soit W^{n+1} une variété riemannienne fermée et \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1, transversalement orienté, de classe C^∞ de W . Soit M_x la feuille de \mathcal{F} par $x \in W$, munie de la métrique induite de W . Soit $K(x)$ la courbure de Lipschitz-Killing de M_x . D. Asimov [1] a démontré que si l'on suppose que W a une courbure sectionnelle constante égale à $c \in \mathbb{R}$, la moyenne de K sur W ne dépend pas du feuilletage. Plus précisément, Asimov a démontré le théorème:

$$\frac{1}{\text{vol } W} \int_W K = \begin{cases} 2^n c^{n/2} / \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ce théorème est le point de départ de notre travail. Nous définissons d'autres fonctions de courbure et nous montrerons que leur moyenne ne dépend que de la courbure c de W . Le théorème d'Asimov sera généralisé dans plusieurs directions:

1. Le point de vue extrinsèque. Soit N un champ de vecteur unitaire normal à \mathcal{F} . Considérons les fonctions symétriques de courbure extrinsèque, c'est-à-dire, les fonctions η_i définies par $\sum_{i=0}^n \eta_i t^i = \det(I + tA)$, où A est la matrice qui donne la variation du vecteur N par rapport à la feuille (voir §1). Les intégrales $\int_W \eta_i$ ne dépendent que de la courbure sectionnelle c de W (supposée constante). Pour aboutir à ces résultats on utilise la technique du repère mobile. Nous donnerons aussi une démonstration géométrique de ce résultat quand $c > 0$.

La théorie pourrait être développée pour des champs d'hyperplans, intégrables ou non. L'interprétation géométrique des fonctions η_i comme fonctions symétriques de courbure des feuilles nous a fait privilégier le cas intégrable.

2. Le point de vue intrinsèque. Supposons n pair. Dans ce cas, on peut construire des fonctions de courbures intrinsèques γ_p des feuilles. Pour Q un

p -plan contenu dans $T_x(M_x)$, p pair, soit $\gamma_Q(x)$ la courbure p -sectionnelle de M_x relative au plan Q (voir [5]). Alors la courbure p -sectionnelle moyenne $\bar{\gamma}_p(x)$ vérifie:

$$\frac{1}{\text{vol } W} \int_W \bar{\gamma}_p = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-2t)} c^{\frac{1}{2}(n-2r)} \binom{\frac{1}{2}(n-2t)}{r} \binom{\frac{1}{2}n}{r} \binom{n}{2r}^{-1},$$

où $p = n - 2t$. En particulier, les intégrales $\int_W \bar{\gamma}_p$ ne dépendent pas du feuilletage.

Quand W est une hypersurface dans un espace euclidien, les fonctions $\bar{\gamma}_p$ sont des multiples des fonctions symétriques de courbure extrinsèque d'ordre pair; et $\bar{\gamma}_n(x)$ est la courbure de Lipshitz-Killing de M_x et l'on retrouve le résultat d'Asimov. L'idée d'utiliser les fonctions $\bar{\gamma}_p$ a été donnée par J. Milnor et cela nous a aidé à rendre le langage plus géométrique qu'il ne l'était en [2].

3. Les feuilletages singuliers. Le point de départ de ce travail était d'une part le théorème d'Asimov, et d'autre part, l'observation que pour un champ de vecteur sur S^2 avec des zéros "raisonnables", la moyenne de la courbure géodésique des courbes intégrales est zéro. Nous démontrerons ce résultat pour les surfaces et nous calculons $\int \sigma_2$ pour des feuilletages avec un lieu singulier civilisé.

4. Un feuilletage est tendu si $\int |K|$ est minimal. Nous démontrons un théorème d'échange qui permet d'étudier les feuilletages tendus par la théorie de Morse et nous faisons quelques observations sur ces feuilletages.

1. Fonctions symétriques de courbure extrinsèques

Soit W^{n+1} une variété riemannienne fermée, orientable, et de courbure sectionnelle constante égale à c . Soit N un champ de vecteur unitaire normal au champ d'hyperplans \mathcal{P} . Soit ∇ la connexion riemannienne de W et x un point de W . L'endomorphisme

$$A_x: T_x(W) \rightarrow T_x(W) \text{ défini par } A_x(Y) = \nabla_Y N$$

laisse le sous espace $P_x = (N(x))^\perp$ invariant. Notons encore A_x la restriction de A_x à P_x . La k 'ième fonction symétrique de courbure extrinsèque de \mathcal{P} : η_k , est en chaque point égale à la k 'ième fonction symétrique de l'endomorphisme A_x de P_x :

$$\det(I + tA_x) = \sum_{i=0}^n \eta_i(x) t^i.$$

Si le champ \mathcal{P} est intégrable et définit un feuilletage \mathcal{F} , notons M_x la feuille de \mathcal{F} passant par le point x . Le nombre $\eta_k(x)$ est alors la valeur de la k 'ième fonction symétrique de courbure extrinsèque de M_x au point x .

Notre premier théorème est

1.1. Théorème.

$$\int_W \eta_k = \begin{cases} c^{k/2} \binom{n/2}{k/2} \text{vol } W & \text{si } n \text{ et } k \text{ sont pairs,} \\ 0 & \text{si } n \text{ ou } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Avant de démontrer 1.1, nous donnerons une démonstration plus géométrique de ce théorème quand $c > 0$. En ce cas W est un quotient de la sphère S de rayon $1/\sqrt{c}$. Démontrons ce résultat pour un feuilletage de la sphère unité S^{n+1} . Soit

$$\begin{aligned} \varphi: S^{n+1} &\rightarrow R^{n+2} \\ \varphi(x) &= x + tN(x). \end{aligned}$$

où $t > 0$ est suffisamment petit pour que φ soit un plongement. L'image de φ est dans la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$, et $\varphi: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}(\sqrt{1+t^2})$ est un difféomorphisme.

Proposition. *Jacobien de $\varphi = \sqrt{1+t^2} \det((I+tA_x)/TM_x)$.*

Démonstration. Tout vecteur dans $T_x(M_x)$, perpendiculaire à la fois à x et à $N(x)$, sera aussi perpendiculaire à $x + tN(x)$, donc

$$T_x(M_x) \subset T_{\varphi(x)}(S^{n+1}(\sqrt{1+t^2})).$$

Considérons deux repères adaptés orthonormaux locaux β et β' définies respectivement sur un voisinage U de x et $\varphi(U)$ de $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \{e_1(x), \dots, e_n(x), N(x)\}, \\ \beta'(x) &= \{\bar{e}_1(x), \dots, \bar{e}_n(x), u(x)\}, \end{aligned}$$

où $e_i(x) \in T_x(M_x)$, $\bar{e}_i(\varphi(x)) = e_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, et $u(x) = (1+t^2)^{-1/2}N(x) - t(1+t^2)^{-1/2}x$. A l'aide de ces repères, calculons la matrice jacobienne de φ :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \begin{vmatrix} \langle d\varphi(e_1), e_1 \rangle & \cdots & \langle d\varphi(e_n), e_1 \rangle & \langle d\varphi(N), e_1 \rangle \\ \langle d\varphi(e_1), e_2 \rangle & \cdots & \langle d\varphi(e_n), e_2 \rangle & \langle d\varphi(N), e_2 \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle d\varphi(e_1), e_n \rangle & \cdots & \langle d\varphi(e_n), e_n \rangle & \langle d\varphi(N), e_n \rangle \\ \langle d\varphi(e_1), u \rangle & \cdots & \langle d\varphi(e_n), u \rangle & \langle d\varphi(N), u \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I + tA_x & \begin{matrix} \langle d\varphi(N), e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle d\varphi(N), e_n \rangle \end{matrix} \\ \hline \langle d\varphi(e_1), u \rangle \cdots & \langle d\varphi(N), u \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, par définition de la métrique induite sur S^{n+1} , $\nabla_{e_i} N$ est la projection orthogonale de $dN(e_i)$ sur $T_x(S^{n+1})$. Le vecteur $d\varphi(e_i)$ est orthogonal à u pour tout i :

$$\begin{aligned} \langle d\varphi(e_i), u \rangle &= \left\langle tdN(e_i) + e_i, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} N - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} x \right\rangle \\ &= - \left\langle tdN(e_i), \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} x \right\rangle = \langle N, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\langle dN, N \rangle = 0, \quad \langle dN, x \rangle = -\langle N, dx \rangle,$$

nous avons

$$\det \varphi'(x) = \sqrt{1+t^2} \det(I + tdN/T_x(M_x)). \quad \text{q.e.d.}$$

D'autre part, comme φ est un difféomorphisme,

$$\int_{S^{n+1}} |\det \varphi'(x)| = \text{vol}(S^{n+1}(\sqrt{1+t^2})).$$

Mais $\det \varphi'(x) > 0$ pour t petit et comme $n+1$ est impair,

$$\int_{S^{n+1}} \det \varphi'(x) = \frac{2\pi^{n/2+1}}{(n/2)!} (\sqrt{1+t^2})^{n+1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{S^{n+1}} \det(I + tdN) \Big|_{T_x(M_x)} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \int_{S^{n+1}} \det \varphi'(x) \\ &= (1+t^2)^{n/2} \frac{2\pi^{n/2+1}}{(n/2)!} \\ &= (1+t^2)^{n/2} \text{vol}(S^{n+1}). \end{aligned}$$

En chaque point $\det(I + tdN) = \sum_{i=0}^n \eta_i(x) t^i$ est un polynôme en t et $(1+t^2)^{n/2} = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n/2}{k} t^{2k}$. On en déduit des intégrales de courbure:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n+1}} \eta_{2k+1} &= 0, \\ \int_{S^{n+1}} \eta_{2k} k &= \binom{n/2}{k} \text{vol}(S^{n+1}). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Démontrons maintenant le théorème 1.1. La ligne générale de la démonstration est la suivante:

1. On construit des n -formes ψ_k sur W telles que $\psi_k \wedge \theta_{n+1} = \eta_{n-k} \text{vol } W$, où θ_{n+1} est la forme duale au champ N et $\text{vol}(W)$ est la $(n+1)$ -forme volume de W .

2. Grâce à une formule de récurrence (Lemma 1.6), on construit des n -formes τ_k sur W telles que:

$$d\tau_k = \psi_k \wedge \theta_{n+1} - c^{\frac{1}{2}(n-k)} \binom{n/2}{\frac{1}{2}(n-k)} \text{vol } W, \quad \text{si } n \text{ et } k \text{ sont pairs,}$$

$$= \psi_k \wedge \theta_{n+1} \quad \text{dans les autres cas.}$$

3. On applique le théorème de Stokes.

1.2. Définition. Soit $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un champ de repères orthogonaux, défini sur un ouvert $U \subset W$. Le repère est dit *adapté* si $e_{n+1} = N$ dans \mathcal{U} et ε définit la bonne orientation de W .

Supposons ε un repère adapté, et soient $\{\theta_1, \dots, \theta_{n+1}\}$, ω_{ij} , $i, j = 1, \dots, n+1$, le corepère de ε et les formes de connexion associées à ε définies par:

$$\omega_{ij}(u) = \langle \nabla_u e_i, e_j \rangle.$$

Soient ψ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, des n -formes sur U définies par l'égalité des polynômes en t :

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n \psi_k t^k = (t\theta_1 + \omega_{1,n+1}) \wedge \dots \wedge (t\theta_n + \omega_{n,n+1}).$$

1.3. Lemme. Les formes ψ_k ne dépendent pas du choix du repère adapté.

Démonstration. Supposons que $\bar{\varepsilon} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}\}$ soit un autre repère adapté dans V . Nous allons prouver que

$$\psi_k|_{U \cap V} = \bar{\psi}_k|_{U \cap V}.$$

Nous avons $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} e_j$ où la matrice $\bar{A} = ((a_{ij}))$ vérifie:

- (1) $a_{i,n+1} = a_{n+1,i}$ si $i \neq n+1$, $a_{n+1,n+1} = 1$,
- (2) \bar{A} est orthogonale positive, en particulier $\det \bar{A} = 1$.

Soit A la matrice $((a_{ij}))$, $1 \leq i, j \leq n$. Par (1) et (2) A est orthogonale positive.

Nous avons

$$(3) \quad \bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j.$$

En effet $(\sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j)(\bar{e}_k) = \sum_{s=1}^n a_{is} a_{ks} = \delta_{ik} = \bar{\theta}_i(\bar{e}_k)$.

$$(4) \quad \bar{\omega}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{i,n+1}, \text{ car}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{i,n+1}(u) &= -\langle \nabla_u N, \bar{e}_i \rangle = -\left\langle \nabla_u N, \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^n a_{ij} \langle \nabla_u N, e_j \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{j,n+1}(u). \end{aligned}$$

De (*), il devient clair que, pour chaque t , on a

$$\sum_{k=0}^n \psi_k \Big|_{U \cap V} = \sum_{k=0}^n \bar{\psi}_k \Big|_{U \cap V}.$$

1.4. Corollaire. *Les formes ψ_k sont définies sur W .*

1.5. Lemme (Théorème de la divergence).

$$d\psi_n = (-1)^{n+1} \psi_{n-1} \wedge \theta_{n+1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \left(\sum_{r=1}^{n+1} \omega_{ir} \wedge \theta_r \right) \wedge \cdots \wedge \theta_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \omega_{i,n+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n \wedge \theta_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \psi_{n-1} \wedge \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

Remarque. Le lemme 1.5 n'utilise pas la courbure sectionnelle constante.

1.6. Lemme fondamental. *Avec les notations introduites jusqu'à présent, on a*

$$d\psi_k = (-1)^{n+1} [(n-k+1)\psi_{k-1} - c(k+1)\psi_{k+1}] \wedge \theta_{n+1},$$

$k = 0, 1, \dots, n$ où l'on pose $\psi_{-1} = \psi_{n+1} = 0$.

Démonstration. Nous ferons le calcul dans le repère $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N)$. Dans ce qui suit, $\theta_i, \omega_{ij}, \Omega_{ij}$ sont respectivement les formes du corepère, les formes de connexion, et les formes de courbure. Considérons d'abord le cas où $k = 1, 2, \dots, n-1$. Une expression locale pour ψ_k sera

$$\begin{aligned} \psi_k = \sum_{1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n} &\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_1-1} \wedge \theta_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_1+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \theta_{\alpha_2} \\ &\wedge \omega_{\alpha_2+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_k-1} \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \omega_{\alpha_k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n, \end{aligned}$$

où $\omega_i = \omega_{i,n+1}$. Décomposons $d\psi_k = A + B$, où

$$\begin{aligned} A = \sum_{\substack{1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n \\ i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k}} &(-1)^{i+1} d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{\alpha_1} \\ &\wedge \cdots \wedge \hat{i} \wedge \cdots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n, \end{aligned}$$

$$B = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^k (-1)^{\alpha_i+1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\theta_{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

où $\alpha = 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n$.

Remarque. Le symbole \hat{i} note l'omission du i ème terme.

Décomposons encore $A = A_1 + A_2$ où

$$A_1 = \sum_{\substack{1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < n \\ i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k}} (-1)^{i+1} \sum_{m=1}^{n+1} (\omega_{im} \omega_{m,n+1}) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_i} \\ \wedge \dots \wedge \hat{i} \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \omega_n,$$

$$A_2 = \sum_{\substack{1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < n \\ i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k}} (-1)^{i+1} \Omega_{1,n+1} \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \hat{i} \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Notons $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}$. Dans la triple somme qui compose A_1 , tous les termes sont nuls sauf, peut-être, ceux où $m = \alpha_1, \dots, \alpha_k$. Donc A_1 s'écrit:

$$A_1 = \sum_{\substack{\alpha \\ i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+1} (\omega_{i\alpha_j} \wedge \omega_{\alpha_j}) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_i} \\ \wedge \dots \wedge \hat{i} \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Notons:

$$\omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^i = \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \hat{i} \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \omega_n, \\ \omega_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k}^i = \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_k}, \quad i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k, \\ \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Dans ce cas, en permutant ω_{α_j} et θ_{α_j} on obtient

$$A_1 = \sum_{\substack{\alpha \\ i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \sum_{j=1}^k (-1)^i \omega_{i\alpha_j} \wedge \theta_{\alpha_j} \wedge \omega_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_k} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k}} \sum_{j=1}^k (-1)^i \omega_{i\alpha_j} \wedge \theta_{\alpha_j} \wedge \omega_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_k} \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k}} \omega_{i\alpha_1} \wedge \theta_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2 \dots \alpha_k} \right. \\ + \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k}} \omega_{i\alpha_2} \wedge \theta_{\alpha_2} \wedge \omega_{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_k} + \dots \\ \left. + \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k}} \omega_{i\alpha_k} \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} \right].$$

Maintenant, en regardant séparément les termes et en changeant de variables $a = \{1 \leq a_1 < \dots < a_{k-1} \leq n\}$, on a

$$A_1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[\sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{a_1-1} (\omega_{ir} \wedge \theta_r) \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i \right. \\ + \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \sum_{\substack{r=a_1+1 \\ r \neq i}}^{a_2-1} (\omega_{ir} \wedge \theta_r) \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i \\ + \dots + \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \sum_{\substack{r=a_{k-s}+1 \\ r \neq i}}^n \omega_{ir} \wedge \theta_r \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i \left. \right].$$

Lorsque $r = i, a_1, \dots, a_{k-1}$, le terme $\omega_{ir} \wedge \theta_r \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i$ est nul. Donc

$$A_1 = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \sum_{r=1}^n (\omega_{ir} \wedge \theta_r) \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i.$$

Mais on a: $d\theta_i = \sum_{r=1}^{n+1} \omega_{ir} \wedge \theta_r$, donc

$$A_1 = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} (d\theta_i - \omega_{i,n+1} \wedge \theta_{n+1}) \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i.$$

Posons

$$A_{11} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} d\theta_i \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i,$$

$$A_{12} = - \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \omega_{i,n+1} \wedge \theta_{n+1} \wedge \omega_{a_1 \dots a_{k-1}}^i.$$

Donc $A_{11} + A_{12} = A_1$. Calculons A_{11} en remettant $d\theta_i$ à sa place:

$$A_{11} = - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{\substack{a \\ a_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \omega_i \wedge \dots \wedge \theta_{a_1} \wedge \dots \wedge d\theta_i \\ \wedge \dots \wedge \theta_{a_{k-1}} \wedge \dots \wedge \omega_n \\ = -B.$$

Calculons A_{12} en envoyant θ_{n+1} à la fin et en remettant ω_i à sa place:

$$A_{12} = (-1)^{n+1} \sum_a \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a_1, \dots, a_{k-1}}}^n \omega_{a_1 \dots a_{k-1}} \wedge \theta_{n+1} \\ = (-1)^{n+1} (n - k + 1) \psi_{k-1} \wedge \theta_{n+1}.$$

Maintenant nous allons utiliser l'hypothèse de courbure sectionnelle constante. Les formes de courbures s'écrivent:

$$\begin{aligned} \Omega_{i,n+1} &= -c\theta_i \wedge \theta_{n+1}, \\ A_2 &= \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [-c\theta_i \wedge \theta_{n+1} \wedge \omega_{\alpha_1}^i \dots \alpha_k] \\ &= (-1)^n c \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \omega_1 \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta_i \\ &\quad \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \omega_n \wedge \theta_{n+1} \\ &= (-1)^n c(k+1) \psi_{k+1} \wedge \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} d\psi_k &= A + B = A_{11} + A_{12} + A_2 + B = A_{12} + A_2 \\ &= (-1)^{n+1} [(n-k+1)\psi_{k-1} - c(k+1)\psi_{k+1}] \wedge \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les cas $k = 0$ et $k = n$.

1.7. Corollaire.

- (a) Si $(n - k)$ est impair, la forme $\psi_k \wedge \theta_{n+1}$ est exacte.
- (b) Si n et k sont pairs, la forme

$$\psi_k \wedge \theta_{n+1} - c^{\frac{1}{2}(n-k)} \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}n \\ \frac{1}{2}(n-k) \end{matrix} \right] \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{n+1}$$

est exacte.

Démonstration. Pour la partie (a), on prend la n -forme

$$\begin{aligned} \tau_k &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n-k} \psi_{k+1} + \frac{c(k+2)}{(n-k)(n-k-2)} \psi_{k+3} \right. \\ &\quad + \frac{c^2(k+2)(k+4)}{(n-k)(n-k-2)(n-k-4)} \psi_{k+5} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{c^{\frac{1}{2}(n-k-1)}(k+2)(k+4) \dots (n-1)}{(n-k)(n-k-2) \dots 3.1} \psi_n \right). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6, on a

$$d\tau_k = \psi_k \wedge \theta_{n+1}.$$

Pour la partie (b), soit

$$\tau_k = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n-k} \psi_{k+1} + \frac{c(k+2)}{(n-k)(n-k-2)} \psi_{k+3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{c^{\frac{1}{2}(n-k-2)}(k+2)(k+4)\dots(n-2)}{2.4.6\dots(n-k-2)(n-k)} \psi_{n-1} \right)$$

Par lemma 1.6, on a

$$d\tau_k = \psi_k \wedge \theta_{n+1} - c^{\frac{1}{2}(n-k)} \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}n \\ \frac{1}{2}(n-k) \end{matrix} \right] \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{n+1}. \quad \text{q.e.d.}$$

Relions maintenant les formes ψ_k aux fonctions symétriques de courbure.

1.8. Lemma.

$$\psi_k \wedge \theta_{n+1} = (-1)^{n-k} \eta_{n-k} \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Démonstration. Pour chaque $t \in R$, nous avons

$$\left[\left(\sum_{k=0}^n \psi_k t^k \right) \wedge \theta_{n+1} \right] (e_1, \dots, e_{n+1}) \\ = [(t\theta_1 + \omega_1) \wedge \dots \wedge (t\theta_n + \omega_n) \wedge \theta_{n+1}] (e_1, \dots, e_{n+1}) \\ = \det[(t\theta_i + \omega_i)(e_j)], \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Nous avons $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$ et $\omega_i(e_j) = -\langle \nabla_{e_j} N, e_i \rangle$. Donc

$$\det[(t\theta_i + \omega_i)(e_j)] = \det(tI - \nabla N).$$

Or $\det(I + t\nabla N) = \sum_{i=1}^n \eta_i t^i$, donc

$$\det(tI + \nabla N) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \eta_{n-k} t^k,$$

et

$$(\psi_k \wedge \theta_{n+1})(e_1, \dots, e_{n+1}) = (-1)^{n-k} \eta_{n-k}.$$

Démonstration du théorème 1.1. Si n est impair, W^{n+1} est une variété compacte de dimension paire et de caractéristique d'Euler nulle. Donc $c = 0$ et $\psi_k \wedge \theta_{n+1}$ est une forme exacte pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ grâce au lemme 1.6. Mais le lemme 1.8 donne

$$(-1)^{n-k} \int_W \eta_{n-k} = \int_W \psi_k \wedge \theta_{n+1}.$$

Maintenant, si on applique le théorème de Stokes, on a $\int_W \eta_{n-k} = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Si n est pair, alors le lemme 1.8, le corollaire 1.7 et le

théorème de Stokes nous donnent

$$\int_W \eta_k = \begin{cases} c^{k/2} \binom{n/2}{k/2} \text{vol } W, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.9. Applications. Soit $M = D^2 \times S^1 \subset R^4$ le tore plein de bord plat. Soit \mathcal{F} un feuilletage de M , transversalement orientable, tel que $T = \partial M$ soit une feuille (un feuilletage de Reeb par exemple). Pour $x \in M$ soit $K(x)$ la courbure de Gauss de la feuille de \mathcal{F} par x , munie de la métrique induite de la métrique plate de R^4 . Nous verrons que

$$\int_M K = 2\pi^2.$$

en particulier, ce résultat est indépendant de \mathcal{F} .

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ un repère orthonormal local adapté. Alors

$$\psi_0 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad \psi_1 = \theta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \theta_2, \quad \psi_2 = \theta_1 \wedge \theta_2.$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$d(i^*(\omega_{12}))(x) = -K(x)i^*(\theta_1) \wedge i^*(\theta_2),$$

où $i: L_x \subset M$ est l'inclusion de la feuille. On a

$$d(i^*(\omega_{12})) = i^*(\omega_{13} \wedge \omega_{32} + \Omega_{12}).$$

Comme M est plat, nous avons $\Omega_{12} = 0$, donc

$$d(i^*(\omega_{12})) = -i^*(\omega_{13} \wedge \omega_{23}) = -i^*(\psi_0).$$

D'après le lemme 1.8,

$$\psi_0 \wedge \theta_3 = \eta_2 \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3,$$

où η_2 est la courbure extrinsèque de L_x . Donc $i^*\psi_0 = \eta_2 \theta_1 \wedge \theta_2$ et $\eta_2 = K$.
Maintenant,

$$\int_M K = \int_M \psi_0 \wedge \theta_3 = \int_M d\left(-\frac{1}{2} \psi_1\right) = -\frac{1}{2} \int_T \psi_1.$$

Par le lemme 1.8,

$$\psi_1 \wedge \theta_3 = -\eta_1 \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3,$$

où η_1 est la première fonction symétrique de courbure extrinsèque; donc

$$\int_M K = +\frac{1}{2} \int_T \eta_1,$$

où $\eta_1(x) =$ la trace de $DN_x: T_x(T) \rightarrow T_x(T)$. Un calcul montre que $\eta_1(x) = 1$ pour $x \in T$ et donc

$$\int_M K = \frac{1}{2} \text{vol } T = 2\pi^2.$$

2. Le point de vue intrinsèque

Considérons d'abord un exemple. Pour chaque $\varepsilon < 1/2$, on va construire un feuilletage $\mathcal{F}(\varepsilon)$ sur S^3 . Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un point de S^3 , la feuille M_x qui passe par x est le tore plat $S^1\sqrt{n} \times S^1\sqrt{1-n}$ où $S^1\sqrt{1-n}$ où $S_r^1 \subset R^2$ est le cercle de rayon r . Soient

$$A_1^\varepsilon = \{(x, y, z, \omega) \in S^3 / x^2 + y^2 \leq \varepsilon\},$$

$$A_2^\varepsilon = \{(x, y, z, \omega) \in S^3 / z^2 + \omega^2 \leq \varepsilon\};$$

A_1^ε et A_2^ε sont homéomorphes à $D^2 \times S^1$. On feuillette A_1^ε et A_2^ε par des composantes de Reeb pour obtenir un feuilletage $\mathcal{F}(\varepsilon)$ de S^3 .

Soit $K^\varepsilon: S^3 \rightarrow R$ la courbure de Gauss de la feuille M_x . Nous allons voir que

$$\frac{1}{\text{vol}(S^3)} \int_{S^3} K^\varepsilon \rightarrow 2 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Donc en supposant que $\int_{S^3} K^\varepsilon$ ne dépend pas de ε , ceci nous permet de vérifier la constante dans le théorème d'Asimov. En effet,

$$\int_{S^3} K^\varepsilon = \int_{S^3 - (A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon)} K^\varepsilon + \int_{A_1^\varepsilon} K^\varepsilon + \int_{A_2^\varepsilon} K^\varepsilon$$

Mais $S^3 - (A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon)$ est composé de tores plats, donc la première intégrale est nulle. Les deux dernières sont égales, donc

$$\int_{S^3} K^\varepsilon = 2 \int_{A_1^\varepsilon} K^\varepsilon.$$

D'autre part, pour ε petit, A_1^ε aura des propriétés métriques qui se rapprochent de celles de $D^2\sqrt{\varepsilon} \times S^1\sqrt{1-\varepsilon}$. Donc pour ε suffisamment petit, on a

$$\int_{A_1^\varepsilon} K^\varepsilon \approx \int_{D^2\sqrt{\varepsilon} \times S^1\sqrt{1-\varepsilon}} K^\varepsilon = 2\pi^2\sqrt{1-\varepsilon}.$$

Cette dernière égalité est le résultat d'un calcul analogue à celui fait pour $D^2 \times S^1$ (voir 1.9). Donc

$$\int_{S^3} K^\varepsilon = 2 \int_{A_1^\varepsilon} K^\varepsilon = 4\pi^2 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Maintenant, $\text{vol}(S^3) = 2\pi^2$, donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(S^3)} \int_{S^3} K^\varepsilon = 2.$$

2.1. La n -forme de courbure du théorème de Gauss-Bonnet. Soit M une variété riemannienne orientée de dimension $2k$. Soit $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ un champ de repère orthogonaux positif défini sur un ouvert $U \subset M$. Soient θ_i ,

$\omega_{ij}, \Omega_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, respectivement les formes duales du repère ε , les formes de connexion et les formes de courbure associées à ce repère. Soit Ω la n -forme définie sur U :

$$\Omega = \frac{1}{n!} (-1)^k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}.$$

La forme Ω ne dépend pas du repère ε et elle est globalement définie. Elle satisfait $\Omega(p) = K(p)\nu$, où ν est l'élément de volume de M , et $K(p)$ est la courbure de Lipschitz-Killing de M en p . Ω satisfait la formule du théorème de Gauss-Bonnet [3]:

$$\int_M \Omega = \frac{1}{2} \text{vol}(S^n) \chi(M).$$

2.2. Les n -formes φ_{2t} . Soient $\varphi_{2t}, t = 0, 1, \dots, k$, des k -formes sur U :

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \varphi_{2t} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \\ &\quad \wedge \Omega_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_0 = \Omega, \quad \varphi_{2k} = \varphi_n = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \nu.$$

2.2.2. Lemme. *Les formes φ_{2t} sont globales.*

Démonstration. Soient $\bar{\theta}_i, \bar{\omega}_{ij}, \bar{\Omega}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, les formes associées au repère $\bar{\varepsilon} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. On a les relations:

- (a) $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, où (a_{ij}) est une matrice orthogonale positive.
- (2) $\bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j$,
- (3) $\bar{\Omega}_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{jl} \Omega_{kl}$.

Alors

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \overline{\varphi_{2t}} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(1)j} \bar{\theta}_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(2t)j} \bar{\theta}_j \right) \\ &\quad \wedge \left(\sum_{k,l=1}^n a_{\sigma(2t+1)k} a_{\sigma(2t+2)l} \bar{\Omega}_{kl} \right) \\ &\quad \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k,l=1}^n a_{\sigma(n-1)k} a_{\sigma(n)l} \bar{\Omega}_{kl} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n (a_{\sigma(1)j_1} \cdots a_{\sigma(n)j_n}) \bar{\theta}_{j_1} \wedge \cdots \\ &\quad \wedge \bar{\theta}_{j_{2t}} \wedge \bar{\Omega}_{j_{2t+1}j_{2t+2}} \wedge \cdots \wedge \bar{\Omega}_{j_{n-1}j_n}. \end{aligned}$$

Les termes correspondant à pas tous les j_i distincts sont zéro. Donc on obtient

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_n} (a_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots a_{\sigma(n)\tau(n)}) \theta_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\tau(2t)} \\ \wedge \Omega_{\tau(2t+1)\tau(2t+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\tau(n-1)\tau(n)}.$$

Mais $\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots a_{\sigma(n)\tau(n)} = \operatorname{sgn}(\tau)$. Donc $\bar{\varphi}_{2t} = \varphi_{2t}$ sur leur domaine commun.

2.2.3. Les courbure sectionnelles généralisées. Soit p un entier pair positif, $2 \leq p \leq n$. Soit Q un p -plan tangent à M en x . Soit $\gamma(x)$ la p -ième courbure sectionnelle en x , déterminée par Q définie par [5]. Soit (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormal positif défini sur U tel que $e_1(y), \dots, e_p(y)$ engendre $Q(y)$ pour $y \in U$. Soit θ^p la p -forme sur U :

$$\theta^p = \frac{1}{p!} (-1)^{p/2} \sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(p-1)\sigma(p)}.$$

Alors $\gamma(x) = \theta^p(x)(e_1(x), \dots, e_p(x))$. On peut démontrer que $\gamma(x)$ ne dépend pas du repère.

2.2.4. Définition. Soit $Q(i_1, \dots, i_p)$ le p -plan engendré par e_{i_1}, \dots, e_{i_p} , et soit $\gamma^{i_1, \dots, i_p}(x)$ la p -ième courbure sectionnelle déterminée par $Q(i_1, \dots, i_p)(x)$. On appellera la p -ième courbure sectionnelle moyenne en x , le scalaire $\gamma_p(x)$:

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{1 < i_1 < \cdots < i_p < n} \gamma^{i_1, \dots, i_p}(x).$$

2.2.5. Lemme. On a

$$\varphi_{2t}(x) = \gamma_{n-2t}(x) \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \quad \text{pour } x \in U, t = 0, 1, \dots, n/2 - 1.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \varphi_{2t}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \wedge \Omega_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} \\ & \quad \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \wedge \Omega_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} \\ & \quad \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Omega_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}(e_{\sigma(2t+1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2t)! \frac{1}{n!} \sum_{1 < i_1 < \dots < i_{n-2t} < n} \operatorname{sgn}(\tau) \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{n-2t-1} i_{n-2t}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-2t}}) \\
 &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \frac{1}{n!} (2t)! (n-2t)! \binom{n}{n-2t} \gamma_{n-2t} \\
 &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \gamma_{n-2t}.
 \end{aligned}$$

2.2.6. Corollaire. *Les fonctions γ_p sont globales.*

2.3. Les p -courbures moyennes des feuilles et leurs intégrales. Revenons maintenant à la variété feuilletée W^{n+1} de §1. Le seul cas à étudier est celui où n est pair (sinon la courbure sectionnelle de W est nulle). Les feuilles sont munies de la métrique induite par l'inclusion dans W : $i: M \subset W$. Soit $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un repère adapté et soient $\theta_i, \omega_{ij}, \Omega_{ij}$ les formes associées. Soient $\bar{\omega}_{ij}, \bar{\theta}_i$ les formes de connexion et le corepère associés au repère $\{e_1, \dots, e_n\}$ tangent à la feuille. On a

$$\bar{\omega}_{ij} = i^*(\omega_{ij}), \quad \bar{\theta}_i = i^*(\theta_i), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Les formes $\bar{\Omega}_{ij}$ se calculent à l'aide des formes $\bar{\omega}_{ij}$:

$$\bar{\Omega}_{ij} = - \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{ik} \wedge \bar{\omega}_{kj} + d\bar{\omega}_{ij}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_{ij} &= i^* \left(d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \right) \\
 &= i^*(\Omega_{ij}) + i^*(\omega_{i,n+1}) \wedge i^*(\omega_{n+1,j}).
 \end{aligned}$$

Les formes φ_{2t} sont définies en 2.2 et dans le repère ε elles s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2t} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \bar{\theta}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}_{\sigma(2t)} \\
 &\quad \wedge \bar{\Omega}_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} \wedge \dots \wedge \bar{\Omega}_{\sigma(n-1)\sigma(n)} \\
 &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) i^*(\theta_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \\
 &\quad \wedge (\Omega_{\sigma(2t+1)\sigma(2t+2)} + \omega_{\sigma(2t+1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(2t+2)}) \\
 &\quad \wedge \dots \wedge (\Omega_{\sigma(n-1),\sigma(n)} + \omega_{\sigma(n-1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(n)}).
 \end{aligned}$$

2.3.1. Lemme.

$$\varphi_{2t} = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-2t)} \left[\frac{c^{\frac{1}{2}(n-2t-2r)} \binom{\frac{1}{2}(n-2t)}{r}}{\binom{n}{2r}} \right] i^*(\psi_{n-2r}).$$

Démonstration. Comme W a une courbure sectionnelle constante, on a $\Omega_{ij} = -c\theta_1 \wedge \theta_j$. Donc

$$\begin{aligned} \varphi_{2t} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2t)} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) i^*(\theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)}) \\ &\quad \wedge (-c(\theta_{\sigma(2t+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2)}) + \omega_{\sigma(2t+1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(2t+2)}) \\ &\quad \wedge \cdots \wedge (-c(\theta_{\sigma(n-1)} \wedge \theta_{\sigma(n)}) + \omega_{\sigma(n-1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{n!} i^* \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \right) \\ &\quad \wedge (c(\theta_{\sigma(2t+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2)}) + \omega_{\sigma(2t+1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2),n+1}) \\ &\quad \wedge \cdots \wedge (c(\theta_{\sigma(n-1)} \wedge \theta_{\sigma(n)}) + \omega_{\sigma(n+1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(n),n+1}). \end{aligned}$$

Définissons les formes Φ'_r , $r = 1, \dots, \frac{1}{2}(n-2t) - 1$:

$$\begin{aligned} \Phi'_r &= c^{\frac{1}{2}(n-2t-2r)} i^* \left\{ \sum_{\substack{1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_r < \frac{1}{2}(n-2t) \\ \sigma \in S_n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \right. \\ &\quad \wedge (\theta_{\sigma(2t+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2)}) \wedge \cdots \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_1-3)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_1-2)}) \\ &\quad \quad \quad \wedge (\omega_{\sigma(2t+2\alpha_1-1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2\alpha_1),n+1}) \\ &\quad \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_1+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_1+2)}) \wedge \cdots \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_2-3)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_2-2)}) \\ &\quad \quad \quad \wedge (\omega_{\sigma(2t+2\alpha_2-1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2\alpha_2),n+1}) \\ &\quad \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_2+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_2+2)}) \wedge \cdots \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_r-3)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_r-2)}) \\ &\quad \quad \quad \wedge (\omega_{\sigma(2t+2\alpha_r-1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2\alpha_r),n+1}) \\ &\quad \left. \wedge (\theta_{\sigma(2t+2\alpha_r+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2\alpha_r+2)}) \wedge \cdots \wedge (\theta_{\sigma(n-1)} \wedge \theta_{\sigma(n)}) \right\}. \end{aligned}$$

où r indique le nombre de fois où apparaissent les termes en paquet du type $\omega_{i,n+1} \wedge \omega_{j,n+1}$, et

$$\Phi_0^t = c^{\frac{1}{2}(n-2t)} i^* \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \right),$$

$$\Phi_{\frac{1}{2}(n-2t)}^t = i^* \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \right. \\ \left. \wedge (\omega_{\sigma(2t+1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2),n+1}) \wedge \cdots \wedge (\omega_{\sigma(n-1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(n),n+1}) \right).$$

Avec ces définitions, on a

$$\varphi_{2t} = \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-2t)} \Phi_r^t, \quad t = 0, 1, \dots, n/2.$$

Maintenant, si on observe la formule qui définit Φ_r^t , on voit que la somme $(\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \dots)$ ne dépend pas du choix des r entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Pour $\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_r = r$ on a

$$\Phi_r^t = c^{\frac{1}{2}(n-2t-2r)} \binom{\frac{1}{2}(n-2t)}{r} i^* \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(2t)} \right. \\ \wedge (\omega_{\sigma(2t+1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2),n+1}) \wedge \cdots \\ \wedge (\omega_{\sigma(2t+2r-1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2t+2r),n+1}) \\ \left. \wedge \theta_{\sigma(2t+2r+1)} \wedge \theta_{\sigma(2t+2r+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \right).$$

Maintenant, réordonnons les indices de chaque terme en ordre croissant, ce qui élimine le facteur $\text{sgn } \sigma$. On voit que chaque terme de $i^*(\psi_{n-2r})$ apparaît $(n-2r)!(2r)!$ fois dans la somme, d'où,

$$\Phi_r^t = c^{\frac{1}{2}(n-2t-2r)} \binom{\frac{1}{2}(n-2t)}{r} (n-2r)! (2r)! i^*(\psi_{n-2r}).$$

On peut donc calculer les formes de courbure intrinsèque à partir des formes de courbure extrinsèque, et le lemme 2.3.1 est démontré.

2.3.2. Définition. Soit p un entier pair, $1 \leq p \leq n$, $x \in W$ et $[\gamma_p(y)]_x$ la p 'ième courbure sectionnelle moyenne au point y , de la feuille M_x en x , considérée avec la métrique induite de W . On définit $\overline{\gamma}_p: W \rightarrow R$ par

$$\overline{\gamma}_p(x) = [\gamma_p(x)]_x.$$

2.3.3. Théorème.

$$\frac{1}{\text{vol } W} \int_W \overline{\gamma}_p = c^{\frac{1}{2}(n-2t)} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-2t)} \frac{\binom{\frac{1}{2}(n-2t)}{r} \binom{n/2}{r}}{\binom{n}{2r}},$$

où $p = n - 2t$.

Démonstration. D'après le lemme 2.2.5,

$$\int_W \overline{\gamma_p} = \int_W \varphi_{2t} \wedge \theta_{n+1}.$$

Par le lemme 2.3.1,

$$\int_W \overline{\gamma_p} = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-2t)} \left[\frac{c^{\frac{1}{2}(n-2t-2r)} \binom{n-2t}{r}}{\binom{n}{2r}} \right] \int_W \psi_{n-2r} \wedge \theta_{n+1}.$$

D'après le lemme 1.8: $\psi_{n-2r} \wedge \theta_{n+1} = \eta_{2r} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n+1}$. Donc le théorème se déduit du théorème 1.1.

3. Feuilletages singuliers¹

Supposons maintenant que le feuilletage F admette un lieu singulier C . Nous allons donner, quand le feuilletage vérifie quelques conditions supplémentaires, les valeurs que doivent prendre les intégrales de courbure $\int_{W-C} \sigma_i$ lorsqu'elles convergent.

Nous ferons dans la suite l'hypothèse suivante: Un feuilletage sera dit admissible si il existe une suite V_ε , $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ d'ouverts vérifiant:

- (1) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} V_\varepsilon = C$,
- (2) ∂V_ε est une réunion finie de sous variétés de W^{n+1} ,
- (3) le n -volume de ∂V_ε est inférieur ou égal à ε .

3.1. Théorème. *Dans ce cas si l'intégrale $\int_{W-C} |\sigma_1|$ converge, on a*

$$\int_{W-C} \sigma_1 = 0.$$

Démonstration. En appliquant la formule de Stokes au théorème de la partie I on obtient

$$\left| \int_{W-V_\varepsilon} \sigma_1 \right| = \left| \int_{\partial V_\varepsilon} \sigma_0 \right| \leq \text{vol } \partial V_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Remarques. On a $|\int_{\partial V_\varepsilon} \sigma_0| = \text{vol } \partial V_\varepsilon$ si V_ε est une réunion de feuilles de F .

Les hypothèses du théorème sont en particulier vérifiées pour un feuilletage défini par un champ de vecteur sur une surface fermée S ayant des points singuliers en nombre fini et tel que l'intégrale $\int_{S-C} |\sigma_1|$ converge.

¹Nous devons à J. Milnor et R. Roussarie de précieux conseils pour l'étude de cette question.

Exemple. Soit \mathfrak{X} un champ de vecteurs défini sur un voisinage U de l'origine de \mathbf{R}^2 ayant l'origine pour seul point singulier et dont le 1-jet en 0 est inversible. Soit B un voisinage borné de l'origine d'adhérence contenue dans \mathcal{O}_U . Alors l'intégrale $\int_{B-0} |\sigma_1|$ converge.

Démonstration. Soit x un point d'une courbe intégrale du champ $\mathfrak{X}: x \mapsto V(x)$. Paramétrons cette courbe intégrale par la longueur de son arc: s . On a

$$|\sigma_1(x)| = \left\| \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V}{\|V\|} \right)_x \right\|.$$

Notons p_N la projection d'un vecteur de $T_x \mathbf{R}^2$ sur la normale à $V(x)$ et D la dérivée d'un champ de vecteurs vu comme application $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. On a encore

$$|\sigma_1(x)| = \left\| D \left(\frac{V}{\|V\|} \right)(x) \left(\frac{V}{\|V\|} \right) \right\| = \left\| p_N \circ D \left(\frac{V}{\|V\|} \right)(x) \left(\frac{V}{\|V\|} \right) \right\|$$

puisque le vecteur $D(V/\|V\|)(x)(V/\|V\|)$ est normal à V . Il suffit donc pour majorer $|\sigma_1|$ de majorer la norme de l'application $p_N \circ D(V/\|V\|)(x)$. La matrice de $D(V/\|V\|)$ vaut

$$D \left(\frac{V}{\|V\|} \right) = \frac{1}{\|V\|} DV + \left[V \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\|V\|}, V \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\|V\|} \right],$$

on a donc

$$p_N \circ D \left(\frac{V}{\|V\|} \right) = \frac{1}{\|V\|} p_N \circ DV.$$

Sur le voisinage B de l'origine $\|DV\|$ est borné: $\|DX\| \leq A$, tandis que l'on a $\|V(x)\| > a\|x\|$ où a est le plus petit des modules des valeurs propres de DV . On a donc: $|\sigma_1(x)| \leq A/a\|x\|$ qui est une fonction intégrable au voisinage de l'origine de \mathbf{R}^2 .

Pour étudier les champs de vecteurs sur une surface S , il nous faut comprendre comment un difféomorphisme transforme la fonction σ_1 .

3.2. Lemme. Soit h un difféomorphisme de \mathbf{R}^n sur lui-même préservant l'origine et tangent en l'origine à une isométrie. Il existe alors une constante A , telle que, quelle que soit l'hypersurface L passant par 0 de courbure moyenne $\sigma_1(0)$, la courbure moyenne $\sigma'_1(0)$ de son image $h(L)$ en 0 vérifie

$$|\sigma_1(0) - \sigma'_1(0)| < A.$$

Démonstration. Comme une isométrie ne change pas la courbure il suffit de considérer le cas où Dh est l'identité. Nous savons que si N est un champ de vecteurs unitaires normal à L la courbure moyenne vaut

$$\sigma_1 = \text{trace}(X \rightarrow \nabla_X N).$$

Nous voulons pouvoir calculer σ_1 à l'aide d'un vecteur normal non unitaire. Pour cela si N est un champ de vecteurs sur L notons DN l'application

$T_0L \rightarrow T_0\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n$, $X \rightarrow \nabla_X N$, et p_T la projection d'un vecteur de $T_0\mathbf{R}^n$ sur T_0L . On a:

$\sigma_1(0) = \text{trace}(p_T \circ DN)$ si N est un champ de vecteurs unitaires normal à L . Avec des notations évidentes, on aura

$$\sigma'_1(0) = \text{trace}(p_{T'} \circ DN').$$

Supposons que L soit donné au voisinage de l'origine par une équation f on peut prendre comme champ de vecteurs unitaires normal $N = \text{grad } f / \|\text{grad } f\|$. Choisissons f de sorte que $\|\text{grad } f(0)\| = 1$. Prenons $N' = \text{grad } f \circ h^{-1} / \|\text{grad } f \circ h^{-1}\|$ et choisissons notre repère de sorte que

$$N(0) = N'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

on aura alors $P_T = P_{T'}$ = projection sur l'hyperplan ($X_1 = 0$).

Il suffit pour démontrer le lemme de majorer la norme $\|p_T \circ DN - p_{T'} \circ DN'\|$ car si P et Q sont deux matrices (n, n) on a

$$\|\text{Trace } P - \text{Trace } Q\| \leq n\|P - Q\|.$$

Calculons

$$\begin{aligned} p_{T'} \circ DN' &= p_{T'} \circ D \left[\frac{\text{grad } f \circ h^{-1}}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|} \right] \\ &= p_{T'} \circ \frac{D(\text{grad } f \circ h^{-1})}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \|\text{grad } f \circ h^{-1}\|}{\partial u'_1} \cdot \text{grad } (f \circ h^{-1}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \|\text{grad } f \circ h^{-1}\|}{\partial u'_n} \cdot \text{grad } (f \circ h^{-1}) \end{bmatrix} \\ &= p_{T'} \circ \frac{D(\text{grad } f \circ h^{-1})}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|} \\ &= p_{T'} \circ \frac{D[\widetilde{Dh^{-1}} \cdot (\text{grad } f) \circ h^{-1}]}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|} \\ &= p_{T'} \circ \frac{\widetilde{Dh^{-1}} \cdot (D \text{ grad } f) \circ h^{-1} \cdot Dh^{-1}}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|} \\ &\quad + p_{T'} \circ \frac{D(\widetilde{Dh^{-1}}) \cdot (\text{grad } f) \circ h^{-1}}{\|\text{grad } f \circ h^{-1}\|}, \end{aligned}$$

où \tilde{M} est la matrice transposée de M . Les matrices $\widetilde{Dh}^{-1}(0)$ et $Dh^{-1}(0)$ sont l'identité, on a donc

$$\begin{aligned} p_{T'} \circ DN'(0) &= D \operatorname{grad} f \circ h^{-1}(0) + (M_{ij}) \\ &= D \operatorname{grad} f(0) + (M_{ij}), \end{aligned}$$

où M_{ij} est la matrice de $p_{T'} \circ DDh^{-1}(0)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et ne dépend que du difféomor-

phisme h et non de l'équation f , c'est-à-dire ne dépend pas de l'hypersurface de \mathbf{R}^n dont nous calculons la courbure scalaire.

Remarque. La même démonstration permet de démontrer que si $Dh(0)$ est proche de l'identité on a $|\sigma_1(0) - \sigma'_1(0)| \leq A + \varepsilon \sup(\sigma_1, \sigma'_1)$ où ε peut être rendu arbitrairement petit en choisissant $Dh(0)$ assez proche de l'identité.

Le lemme 3.2 permet d'étendre le résultat de la remarque aux champs de vecteurs sur une surface ayant des points singuliers isolés et en ces points singuliers un 1-jet inversible.

3.3. Corollaire. Soit \mathcal{X} un champ de vecteurs sur une surface fermée orientable S dont les singularités sont isolées et tel que le 1-jet du champ de vecteurs soit inversible en chaque point singulier. Appelons C l'ensemble des points singuliers. On a

$$\int_{W-C} \sigma_1 = 0.$$

Quand \mathcal{F} est un feuilletage singulier défini par une 1-forme ω "civilisée" le lemme 2 va permettre de calculer la seconde intégrale de courbure $\int_{W-C} \sigma_2$. Rappelons le théorème de Kupka-Darboux:

3.4. Théorème. Si ω est un germe de 1-forme intégrable sur W^{n+1} et si on a l'implication: $(\omega(x_0) = 0 \Rightarrow d\omega(x_0) \neq 0)$, il existe une carte locale $h: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow W^{n+1}$ telle que $h(0, \dots, 0) = x_0$; $Dh(0) = I_d$ dans laquelle ω s'écrit:

$$\omega = a_1(x_1, x_2)dx_1 + a_2(x_1, x_2)dx_2.$$

Il en résulte qu'au voisinage d'un point singulier de ω le feuilletage est l'image par un difféomorphisme h vérifiant $Dh(0) = I_d$ du feuilletage produit suivant de \mathbf{R}^{n+1} :

$$\mathbf{R}^{n-1} \times \mathcal{F}_2$$

où \mathcal{F}_2 est un feuilletage singulier de \mathbf{R}^2 .

Définissons l'outil qui permet d'achever le calcul de l'intégrale $\int_{W-C} \sigma_2$.

3.5. Définition. Un ε -voisinage adapté V_ε d'un point singulier isolé x d'un champ de vecteurs de \mathbf{R}^2 est un voisinage V_ε du point singulier x contenu dans la boule $B(x, \varepsilon)$ dont le bord ∂V_ε est réunion finie de segments de courbes intégrales de \mathfrak{X} et de courbes orthogonales à \mathfrak{X} .

3.6. Proposition. En un point singulier isolé de \mathfrak{X} où le 1-jet de \mathfrak{X} est non nul il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un voisinage adapté V_ε de x .

Démonstration. Examiner les configurations possibles; par exemple si x est un point de selle on aura la figure 1.

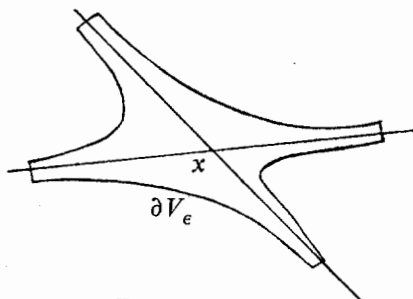


FIGURE 1

3.7. Lemme.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1 = \pm 2\pi.$$

Démonstration. Rappelons une expression de η_1 :

$$\eta_1 = k_{g_1} \theta^1 + k_{g_2} \theta^2,$$

où k_{g_1} est la courbure géodésique des feuilles de \mathfrak{F} et k_{g_2} la courbure géodésique des trajectoires orthogonales. L'intégrale $|\int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1|$ est alors l'angle dont a tourné le vecteur $\mathfrak{X}/\|\mathfrak{X}\|$ le long de ∂V_ε . En effet ce vecteur est tangent aux feuilles de \mathfrak{F} et normal à celle de \mathfrak{F}^\perp , et nous savons que

$$\left| \int_C k_g \right| = \{ \text{angle dont a tourné le vecteur normal (ou tangent) à } C \}.$$

Comme ∂V_ε est une courbe fermée, on a

$$\left| \int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1 \right| = 2\pi.$$

Le signe de l'intégrale $\int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1$ dépend de l'indice du point singulier, est positif pour un centre et négatif pour un point de selle.

Calculons maintenant l'intégrale

$$\int_{\partial V_c \times \mathcal{Q}} \eta_1 \quad \text{pour le feuilletage } \mathcal{F} \times \mathcal{Q},$$

où U est un ouvert de \mathbf{R}^{n-1} , et \mathcal{F} un feuilletage d'une surface. On a en tout point x , $\eta_1(x) = k_{g_1}(x)\theta^1 + k_{g_2}(x)\theta^2$, où k_{g_1} et k_{g_2} sont les courbures géodésiques de \mathcal{F} , et \mathcal{F}^\perp en la projection du point x tandis que θ^1 (resp. θ^2) sont les formes duales au vecteur normal unitaire à $\mathcal{F} \times \mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{F}^\perp \times \mathcal{Q}$), et donc

$$\int_{\partial V_c \times \mathcal{Q}} \eta_1 = \pm 2\pi \text{ vol } \mathcal{Q}.$$

Soit maintenant \mathcal{F} un feuilletage singulier. Le théorème de Darboux-Kupka incite à généraliser le résultat montré pour un feuilletage produit à certains feuilletages singuliers que nous appellerons civilisés.

3.8. Théorème. *Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier civilisé de lieu singulier C . On a, si la première intégrale converge,*

$$\int_{W-C} \sigma_2 = \frac{nc}{2} \text{ vol } W \pm \pi \text{ vol } C.$$

La définition que nous donnons d'un feuilletage civilisé est une définition qui permet de démontrer facilement le théorème. Ces conditions peuvent certainement être allégées. Soit

$$\text{cyl: } \mathcal{E} = ([0, \varepsilon] \times S^1 \times \mathbf{R}^{n-1}) \rightarrow \text{Tub}_\varepsilon(C)$$

des "coordonnées cylindriques suivant C " (des algébristes penseraient à " W éclatée suivant C ").

3.9. Définition. Un feuilletage \mathcal{F} singulier est civilisé si

- (1) le lieu singulier C est de codimension 2,
- (2) la restriction d'une 1-forme ω , définie sur tout W , qui définit \mathcal{F} , au disque géodésique D_p , normal au point p au lieu singulier, a un 1-jet inversible,
- (3) cette 1-forme ω est "peu vrillée" c'est-à-dire dans un système de coordonnées, où x_1, x_2 décrivent les disques D_p et x_3, \dots, x_{n+1} le lieu singulier C , ω s'écrit:

$$\omega = \sum_1^{n+1} a_i dx_i,$$

où les fonctions a_i se relèvent en des fonctions lisses sur \mathcal{E} . (Cette condition implique que lorsque l'on s'approche de C suivant une géodésique l'hyperplan noyau de ω admet une limite, ainsi que la forme $\theta^{n+1} = \omega / \|\omega\|$).

Remarque. La condition (2) s'écrit:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

au voisinage de C .

Démonstration du théorème. La structure de "presque produit local" va permettre de construire des voisinages adaptés du lieu singulier C (voir figure 2).

En effet, au voisinage de chaque point p du lieu singulier on peut trouver une boîte $V_{p,\varepsilon}$ contenue dans $\text{Tub}_\varepsilon(C)$. Soit δ_p un petit pavé de C centré en p . Le bord de $V_{p,\varepsilon}$ est formé:

– des parois qui, soit sont des plaques de \mathcal{F} , soit sont obtenues à partir des courbes orthogonales à la trace du feuilletage \mathcal{F} sur le disque δ_p en utilisant la structure produit de $\text{Tub}_\varepsilon(C)$,

– du couvercle $\partial(\delta_p) \times D_p$ (le couvercle a deux composantes si $\dim C = 1$).

Un pavage fini de C par des pavés δ_p permet de construire le voisinage adapté V_ε de C cherché.

Nous avons maintenant

$$\int_{W-C} \sigma_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{W-V_\varepsilon} \sigma_2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1 + \alpha(n) \frac{nc}{2} \text{vol } W,$$

où $\alpha(n) = 1$ si n est pair, et $\alpha(n) = 0$ si n est impair.

Notons $\partial_L V_\varepsilon$ la partie de ∂V_ε formée de plaques, $\partial_\alpha V_\varepsilon$ la partie de ∂V_ε réunion de disques normaux à C , et $\partial_\beta V_\varepsilon$ la réunion des parois obtenues en utilisant des courbes orthogonales aux traces du feuilletage \mathcal{F} sur les pavés δ_p . On a $\partial V_\varepsilon = \partial_L V_\varepsilon \cup \partial_\alpha V_\varepsilon \cup \partial_\beta V_\varepsilon$ (voir figure). Calculons d'abord la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_\alpha V_\varepsilon} \eta_1.$$

En reprenant les notations de la première partie posons $\theta^{n+1} = \omega / \|\omega\|$, tandis que $\theta^1 \cdots \theta^n$ complètent le corepère adapté. Posons $r = x_1^2 + x_2^2$. Pour calculer la n -forme η_1 il faut calculer les formes ω_i définies par $d\theta^{n+1} = \sum \omega_i \wedge \theta^i$. Mais comme le corepère θ^i est orthonormé, nous avons l'inégalité $\|\omega_i\| \leq \|d\theta^{n+1}\|$ pour tout i et donc l'inégalité

$$\|\eta_1\| \leq (n+1) d\theta^{n+1}.$$

Calculons

$$d\theta^{n+1} = d\left(\frac{1}{\|\omega\|}\right) \wedge \omega + \frac{1}{\|\omega\|} d\omega$$

et $d\omega = \sum_{j,i} a_i/x_j dx_j \wedge dx_i$.

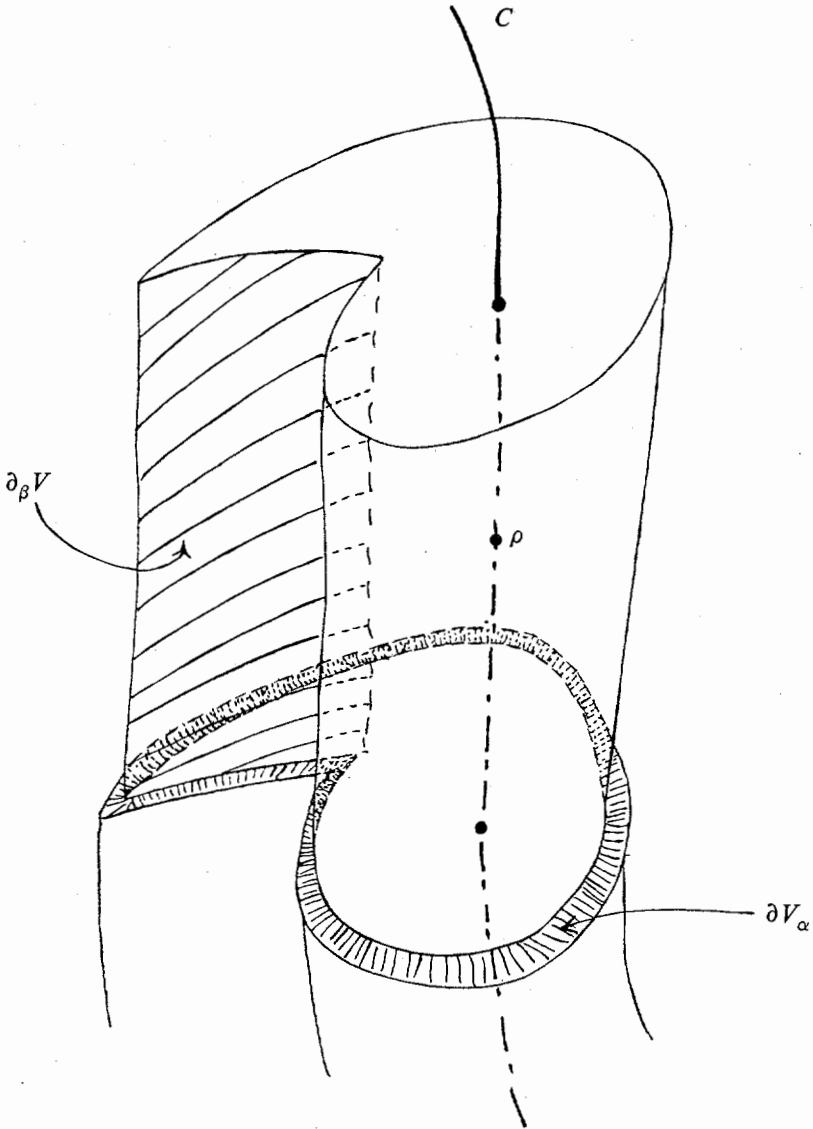


FIGURE 2

D'autre part, il existe une matrice lisse $\mathfrak{N}(x_1, \dots, x_{n+1})$ qui orthonormalise le corepère $dx_1 \cdots dx_p \cdots dx_{n+1}$. Par choix du système de coordonnées on a $\mathfrak{N}(p) = I_d$. On a donc dans ce nouveau repère orthonormé:

$$\|\omega\| = \|(a_1, \dots, a_{n+1})\mathfrak{N}\|$$

et donc $\|\omega\| < M(\sum a_i^2)^{1/2}$. Comme les fonctions $\partial a_i/\partial x_j$ se relèvent à \mathcal{E} elles sont bornées uniformément sur un voisinage du point p . Soit D un majorant pour ces fonctions. Nous pouvons écrire la majoration

$$\left\| \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \|\omega\|^2 dx_i \right\| < M' \|\omega\|^2 + MD \|\omega\|,$$

où les constantes M et M' se calculent à l'aide des coefficients de la matrice \mathfrak{N} et de leurs dérivées. On a enfin

$$d\left(\frac{1}{\|\omega\|}\right) = -\frac{1}{\|\omega\|^3} \left| \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \|\omega\|^2 dx_i \right|.$$

L'hypothèse faite sur le 1-jet de ω implique qu'il existe une constante A telle que pour tout vecteur unitaire X appartenant à $T_x W$ on ait

$$|\omega(X)| > Ar \|X\|.$$

D'autre part, comme la 1-forme ω se relève en une forme lisse sur \mathcal{E} on a

$$|a_i(x)| \leq Cr.$$

Nous en déduisons les majorations

$$\|\omega\| \leq Br, \quad \frac{1}{\|\omega\|} \leq \frac{1}{Ar}, \quad d\left(\frac{1}{\|\omega\|}\right) \leq \frac{M'}{Ar} + \frac{MD}{A^2 r^2}.$$

De la matrice \mathfrak{N} on déduit une matrice $\tilde{\mathfrak{N}}$ de changement de base dans $\Lambda^2(W)$ dont les coefficients sont aussi lisses et bornés. Nous en déduisons la majoration

$$\|d\omega\| = \sum \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \right\| \leq \tilde{M}D,$$

où \tilde{M} est une constante qui se calcule à l'aide des coefficients de $\tilde{\mathfrak{N}}$. Ceci permet donc de majorer la norme $\|d\theta^{n+1}\|$:

$$\|d\theta^{n+1}\| \leq \left(\frac{M'}{Ar} + \frac{MD}{A^2 r^2} \right) Br + \frac{D}{Ar} = \frac{N}{r},$$

d'où enfin la majoration

$$\|\eta_1\| \leq \frac{N'}{r},$$

ce qui suffit à démontrer que l'intégrale $\int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1$ tend vers 0 avec ε .

Calculons maintenant la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V_\varepsilon} \eta_1$. Remarquons que, puisque les fonctions $\partial a_i/\partial x_j$ se relèvent sur \mathcal{E} en des fonctions lisses, et comme l'on a $\omega = C^{te} = 0$ sur le lieu singulier C , on a

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p) = 0 \quad \text{pour } j \geq 3,$$

on a donc $\partial a_i/\partial x_j = 0(r)$ pour $j \geq 3$.

D'autre part, comme θ^{n+1} se relève à \mathfrak{E} on a, puisque la norme $\|\omega\|$ est minoré par Ar ,

$$\overline{\lim} \left| \frac{a_i}{r} \right| \leq E \quad \text{pour tout } i,$$

enfin le théorème de Kupka-Darboux implique que les vecteurs tangents au lieu singulier C sont dans le noyau de toute forme φ qui appartient à l'adhérence des formes θ^{n+1} , et donc que l'on a

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{a_i(x)}{r} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{a_i(x)}{\|\omega\|} = 0 \quad \forall i \geq 3.$$

On a donc $\partial a_i / \partial x_j(p) = 0, \forall i \geq 3$, et

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p) = 0(r) \quad \forall i \geq 3.$$

Soit $\bar{\omega}$ la 1-forme définie sur le disque normal D_p par

$$\bar{\omega} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2.$$

Notons d_0 la différentielle de la forme $\bar{\omega}$:

$$d_0 \bar{\omega} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_2 \wedge dx_1.$$

Notons d'autre part $\bar{\eta}_1$ la 1-forme construite comme dans la partie a à l'aide du feuilletage $\mathfrak{F} \cap D_p$.

Posons aussi $\theta^{n+1} = \bar{\omega} / \|\omega\|$. Les formes $\bar{\omega}$ et $d_0 \bar{\omega}$ sont définies sur tous les disques normaux à C dans un voisinage de p , donc sur le voisinage de $p \in C$ que nous considérons. Notons $\tilde{\omega}$ la forme égale à ω dans chaque disque D_p , $\bar{\eta}_1$ la forme égale à $\bar{\eta}_1$ dans chaque disque D_p et $\tilde{\eta}_1$ la forme $\eta_1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n$ où $\theta^2 \cdot \dots \cdot \theta^n$ sont les formes duales à un corepère adapté à \mathfrak{F} qui vérifient pour tout vecteur tangent X à C et toute suite x_n tendant vers un point p de C :

$$\text{Lim } \theta^i(x_n)(X) = 0, \quad \forall i = 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Les remarques que nous venons de faire et les calculs précédents nous permettent d'écrire les estimations

$$\begin{aligned} |\|\omega\| - \|\bar{\omega}\|| &\leq \|\omega - \bar{\omega}\| = 0(r^2), \\ \|d\omega - d\tilde{\omega}\| &= 0(r). \end{aligned}$$

Enfin de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left\| d \frac{1}{\|\omega\|} - d \frac{1}{\|\tilde{\omega}\|} \right\| &\leq \left\| \left[\frac{1}{\|\omega\|^3} - \frac{1}{\|\tilde{\omega}\|^3} \right] \left(\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \|\omega\|^2 dx_i \right) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{\|\tilde{\omega}\|^3} \left\| \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \|\omega\|^2 - \frac{\partial}{\partial x_i} \|\tilde{\omega}\|^2 \right) dx_i \right\|, \end{aligned}$$

on déduit l'estimation

$$\|d\theta^{n+1} - d\tilde{\theta}^{n+1}\| = O(c^{\epsilon}).$$

En utilisant une fois de plus la matrice M nous pouvons calculer une constante M'' telle que

$$\|\eta_1 - \tilde{\eta}_1\| \leq M'',$$

nous avons donc

$$\left| \int_{\partial_\beta V} \eta_1 - \tilde{\eta}_1 \right| \leq M'' \text{ vol } \partial_\beta V,$$

$$\left| \int_{\partial_L V} \eta_1 - \tilde{\eta}_1 \right| \leq M'' \text{ vol } \partial_L V,$$

(cette dernière égalité est aussi une conséquence du lemme 3.2). Ce qui implique que ces deux dernières intégrales tendent vers 0 avec ϵ .

Enfin la n -forme $\tilde{\eta}_1$ a été construite pour que le calcul des intégrales $\int_{\partial V_\epsilon} \tilde{\eta}_1$ et $\int_{\partial_\beta V_\epsilon} \tilde{\eta}_1$ se ramène au cas plan. En effet la structure produit de V_ϵ a été choisie pour que l'intégrale $\int_{\delta_p} \int_{\partial D_p} \tilde{\eta}_1$ soit la partie principale de l'intégrale $\int_{\delta_p \times D_p} \tilde{\eta}_1$. Nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_\beta V} \tilde{\eta}_1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_L V} \tilde{\eta}_1 = \pm 2\pi \text{ vol } C,$$

nous en déduisons l'égalité

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V_\epsilon} \eta_1 = \pm 2\pi \text{ vol } C,$$

où le signe dépend de l'indice du point singulier $p \in C$ du feuilletage $\mathcal{F} \cap D_p$ du disque transverse D_p , indice qui bien sûr ne dépend pas du choix du point $p \in C$.

Cette dernière égalité termine la démonstration du théorème 3.8. q.e.d.

Il serait intéressant de démontrer des résultats analogues si le lieu singulier est de codimension plus grande.

3.10. Conjecture. (1) Le résultat du théorème 1 calculant les intégrales $\int_W \sigma_i$ reste vrai pour un feuilletage singulier civilisé (il faudrait préciser cette notion) de lieu singulier C si la codimension de celui-ci est supérieure à i .

(2) Pour calculer l'intégrale $\int_W \sigma_{\text{codim } C}$ il faut introduire un terme correctif qui ne dépend que du volume du lieu singulier C .

4. Feuilletages tendus et courbure totale

Sachant calculer les intégrales de courbure extrinsèque, il est naturel de chercher à évaluer l'intégrale $\int_{W^{n+1}} |\sigma_n|$, puis d'étudier, s'il en existe, les feuilletages minimalisant cette intégrale.

A. Feuilletages tendus

La formulation, rappelée dans la partie 1, des résultats d'Asimov concernant les variétés plates permet de trouver les feuilletages tendus du tore T^2 ou de l'anneau, puis de généraliser ces résultats à T^2 et à l'anneau formé de deux boules convexes de dimension n emboîtées.

4.1. Théorème. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de T^2 contenant une composante de Reeb A . L'intégrale $\int_{T^2} |k| = \int_{T^2} |\sigma_1|$ vérifie*

$$\int_{T^2} |k| \geq \left| \int_A \sigma_1 \right| + \left| \int_{T^2 - A} \sigma_1 \right|.$$

Démonstration. La partie 1 permet de calculer ces deux dernières intégrales en fonction des longueurs l_1 et l_2 des composantes du bord ∂A :

$$\begin{aligned} \left| \int_A \sigma_1 \right| &= \left| \int_{\partial A} \theta^1 \right| = l_1 - l_2, \\ \left| \int_{T^2 - A} \sigma_1 \right| &= \left| \int_{\partial A} \theta'^1 \right| = l_1 - l_2, \end{aligned}$$

où θ^1 est duale à un champ de vecteurs unitaire tangents aux feuilles sur A , et θ'^1 duale à un champ de vecteurs unitaires tangents à \mathcal{F} sur $T^2 - A$ (\mathcal{F} n'est pas transversalement orientable).

Si les feuilles de \mathcal{F} sont localement convexes, on a

$$\int_{T^2} |k| = \left| \int_A \sigma_1 \right| + \left| \int_{T^2 - A} \sigma_1 \right|;$$

en particulier ∂A est réunion de deux géodésiques fermées, et donc

$$\int_{T^2} |k| = \left| \int_{\partial A} \theta^1 \right| = 2\sqrt{p^2 + q^2},$$

si l'âme de la composante de Reeb est homotope à la géodésique fermée de vecteur directeur (p, q) (p et q sont premiers entre eux).

Dans le dernier cas le feuilletage \mathcal{F} est tendu puisque la courbure k est partout de même signe.

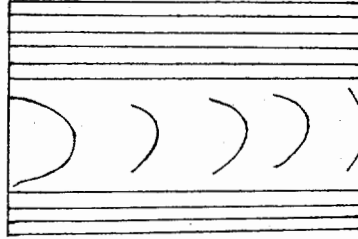


FIGURE 3: composante de Reeb (1,0) tendue

4.2. Corollaire. *Les feuilletages tendus de T^2 sont obtenus à l'aide de n composantes de Reeb (p, q) parallèles séparées par des feuilles plates.*

Soit maintenant \mathcal{F} un feuilletage de l'anneau plat A tel que le bord ∂A soit la réunion de deux feuilles de \mathcal{F} . La partie 1 permet de voir que tout feuilletage d'un anneau A dont le bord est réunion de deux feuilles vérifie

$$\int_A \sigma_1 = \int_{\partial A} \theta^1 = l_1 \pm l_2,$$

où l_1 et l_2 sont les longueurs respectives des deux composantes du bord et où le signe dépend de l'orientation d'un champ de vecteurs transverse au feuilletage. Il est clair que l'intégrale $\int_A |\sigma_1|$ sera minimale si σ_1 garde sur A un signe constant, c'est-à-dire si toutes les feuilles sont localement convexes. Les deux composantes du bord de A sont alors deux courbes convexes, et

$$\int_A |\sigma_1| = |l_1 - l_2|.$$

La généralisation de ces résultats à T^n , B^n , boule convexe de dimension n , ou à l'anneau formé de deux boules convexes emboîtées est immédiate et donne des feuilletages tendus de ces variétés.

B. Théorème d'échange

Donnons un autre moyen, plus géométrique, de calculer l'intégrale $\int_{W^{n+1}} |\sigma_n|$. Soit donc \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 d'un ouvert d'adhérence compacte W^{n+1} de \mathbf{R}^{n+1} . \mathbf{R}^{n+1} est muni de la métrique plate. Soit U un ouvert de W^{n+1} . Soit \mathcal{H} une droite orientée passant par l'origine de \mathbf{R}^{n+1} et h un point de \mathcal{H} . Le nombre $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h)$ est le nombre de points où l'hyperplan normal à \mathcal{H} passant par h est tangent à une feuille de \mathcal{F} en un point de U . Ce nombre est fini pour presque tout (\mathcal{H}, h) appartenant à E , fibré en droite canonique sur \mathbf{R}^n . Posons $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h) = \mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h, W^{n+1})$. Posons $m(\mathcal{H}) = \int_{\mathcal{H}} \mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h)$.

4.3. Théorème.

$$\int_{\mathbb{P}^n} m(\mathcal{H}) = \int_{W^{n+1}} |\sigma_n|.$$

Les deux membres pouvant être infinis.

Démonstration. Considérons l'application suivante²:

$$\begin{aligned} \varphi: W^{n+1} &\rightarrow E \\ x &\mapsto [N(x), P_{N(x)}(x)] \end{aligned}$$

où $N(x)$ est l'axe engendré par la normale en x à la feuille, et où $P_{N(x)}$ est la projection orthogonale sur l'axe engendré par $N(x)$.

Génériquement l'ensemble des points critiques d'une projection $p_{\mathcal{H}}$ est une courbe de classe C^2 de W^{n+1} que nous noterons $\Gamma_{\mathcal{H}}$ courbe polaire associée à \mathcal{H} . Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ l'angle non orienté formé par $N(x)$ et la tangente en x à $\Gamma_{N(x)}$. Le jacobien de φ en x vaut

$$|\text{jac}| \varphi = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & * \\ 0 & (\sigma_n) \end{pmatrix} \right|}{\left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|} = |\sigma_n|.$$

Soit d'abord U un ouvert de W^{n+1} tel que la restriction de φ à l'ouvert U soit un difféomorphisme, on a

$$\int_U |\sigma_n| = \int_U |\text{jacobien}(\varphi)| = \text{mesure}(\varphi(U)) = \int_{\mathbb{P}^n} m(\mathcal{H});$$

en effet les points de $\varphi(U)$ sont précisément les couples $(\mathcal{H}, h \in \mathcal{H})$ tels que le plan orthogonal à \mathcal{H} passant par h est tangent au feuilletage \mathcal{F} en un point de U .

L'ensemble Σ des valeurs critiques de φ est de mesure nulle par le théorème de Sard. L'ensemble $\varphi^{-1}(\Sigma)$ est réunion d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel on a $(\text{jacobien} \varphi) = \sigma_n = 0$. Toujours à un ensemble de mesure nulle près, on peut trouver une partition dénombrable finie $A = A \cup \dots \cup A_p \cup \dots$ telle que

$$\mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h, A) = \sum_1^p \mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h, A_i).$$

Le nombre $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{H}, h, W^{n+1})$ étant presque partout défini et fini ce résultat est encore, pour presque tout (\mathcal{H}, h) , vrai pour une partition dénombrable

²Nous devons à J. Milnor l'idée d'utiliser l'application φ pour simplifier la démonstration du théorème d'échange.

d'un ouvert de W^{n+1} . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{W^{n+1}} |\sigma_n| &= \sum \int_{U_i} |\sigma_n| = \sum \int_{\gamma(U_i)} \mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h, U_i) \\ &= \sum \int_E \mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h, U_i) = \int_E \mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire l'égalité

$$\int_{\mathbf{P}^n} m(\mathcal{K}) = \int_E \mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h) = \int_{W^{n+1}} |\sigma_n|,$$

qui est l'énoncé du théorème d'échange. La géométrie intégrale montre que la longueur d'un arc de courbe plane est égale à l'intégrale suivante:

$$l(C) = \int_{\varepsilon} \#(D \cap C),$$

où ε est l'ensemble des droites D de \mathbf{R}^2 muni de la mesure canonique invariante sous l'action du groupe des isométries; cf. [6].

Le théorème d'échange permet donc de déterminer directement les feuilletages tendus de T^n ou de l'anneau plat A , puisque la condition de minimalité peut s'exprimer à l'aide du nombre $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h)$. Par exemple dans le cas de l'anneau la condition est $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h) = 1$ si la perpendiculaire à \mathcal{K} passant par h coupe le bord extérieur de l'anneau en deux points consécutifs, 0 sinon. On a, si les deux composantes, extérieures: C_1 , de longueur l_1 , et intérieure: C_2 , de longueur l_2 , sont convexes, et si la condition de minimalité est réalisée:

$$\int_{\varepsilon} \mu(\mathcal{F}, \mathcal{K}, h) = \mu(\text{droite coupant } C_1) - \mu(\text{droites coupant } C_2) = l_1 - l_2,$$

on vérifie enfin que si le feuilletage de l'anneau est formé de courbes localement convexes, la condition de minimalité est remplie.

Remarque. Le théorème d'échange permet de retrouver géométriquement quelques invariants des singularités algébriques [4].

Bibliographie

- [1] D. Asimov, *Average Gaussian curvature of leaves of foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978) 131–133.
- [2] F. Brito. R. Langevin & H. Rosenberg, *Intégrales de courbures sur des variétés feuilletées*, C. R. Acad. Sci. Paris **28** (1977), 533–536.
- [3] S. S. Chern, *On the curvature integral in a Riemannian manifold*, Ann. of Math. **46** (1945) 674–684.
- [4] R. Langevin, *Courbures, feuilletages, et singularités algébriques*, Séminaire Lê Dung Traug Publications Univ. Paris VII.
- [5] J. A. Thorpe, *On the curvatures of Riemannian manifolds*, Illinois J. Math. **10** (1966) 412–417.
- [6] L. A. Santaló, *Introduction to integral geometry*, Hermann, Paris, 1953.